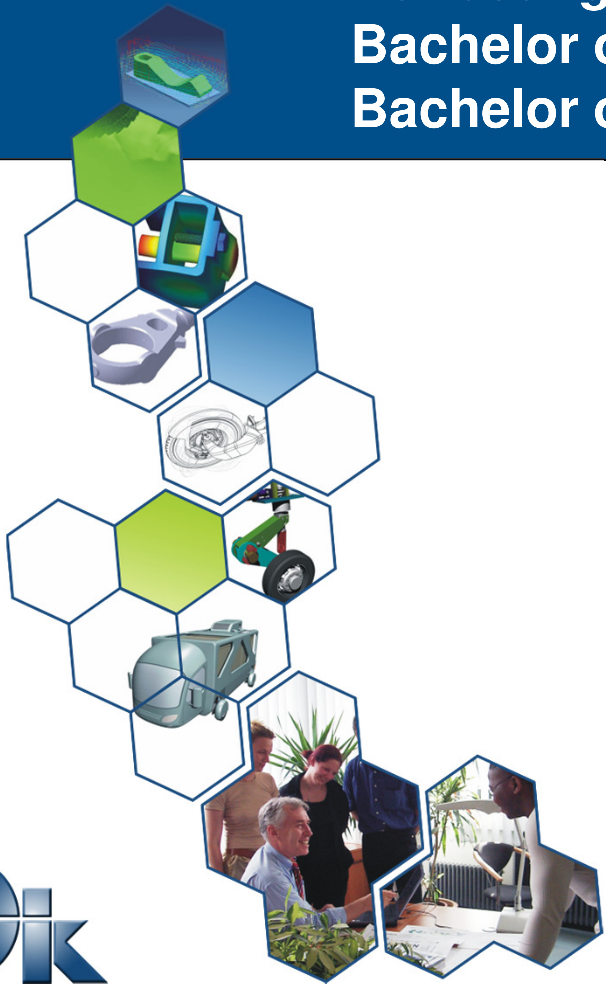
Grundlagen der elektronischen Datenverarbeitung

Vorlesung für Bachelor of Science MPE, Mechanik, Bachelor of Education



Die Vorlesung wird zusätzlich in den Raum S3|11-006 (1 Stockwerk tiefer) übertragen.

Prüfungsanmeldung in TUCaN

- Anmeldung erfolgt über TUCaN vom 15.12.2010 bis 14.01.2011
- Voraussetzung:
  - bereits angemeldet beim Modul „Grundlagen der Datenverarbeitung“
  - bereits angemeldet bei der Vorlesung „Grundlagen der Datenverarbeitung“

- Bei Rückfragen wenden Sie sich bitte an Ihr Prüfungssekretariat z.B. das MechCenter

Nur noch bis zum 14.01.2011 möglich!

Gliederung 9. Vorlesungsstunde GeDV

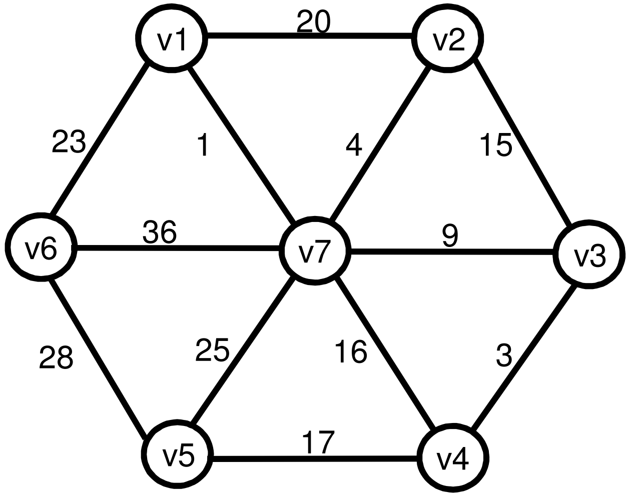
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Algorithmenklassen
  - Minimaler Spannbaum

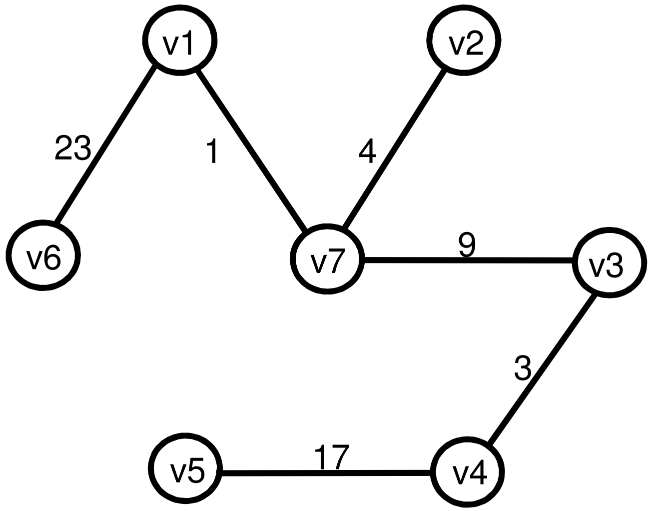
- Mathematische und technische Grundlagen
  - Stellenwertsystem
  - Komplemente
  - Umrechnungsverfahren
  - Grundrechenarten im Binärsystem
  - Textdarstellung
  - Boolesche Algebra
  - Schaltungslogik

Beispiel: Minimaler Spannbaum (Wdh.)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Ein minimaler Spannbaum eines Graphen ist eine Kantenmenge, die alle Knoten so verbindet, daß ein Baum entsteht und die *Summe der Kanten minimal* ist.



Algorithmus von Kruskal

1. Sortiere Kanten nach aufsteigendem Gewicht
   Ergebnis: Kantenliste L
2. Initialisiere Kantenmenge des gesuchten minimalen Spannbaums durch die leere Menge: S={}
3. Füge aus der Kantenliste L eine Kante nach der anderen der Menge S nur dann hinzu, falls das Ergebnis S nach wie vor einen Baum darstellt.

Skript S. 118 f

Beispiel: Minimaler Spannbaum

Numerische Algorithmen

Numerische Algorithmen sind Berechnungsverfahren zur Lösung mathematischer Probleme.

Klassen von Numerischen Algorithmen:

- Numerische Verfahren zur Lösung algebraischer und transzendentaler Gleichungen
- Verfahren zur numerischen Lösung linearer Gleichungssysteme
- Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme
- Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen
- Approximation stetiger Funktionen
- Interpolation und Splines
- Numerische Differentiation
- Numerische Integration
- Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen
- Differentialgleichungen erster Ordnung
- Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme bei Systemen von gewöhnlichen
- Differentialgleichungen erster Ordnung und bei Differentialgleichungen höherer Ordnung

Skript S. 122 ff

Kapitel 5

Mathematische und technische Grundlagen

– Zahlendarstellungen
– Komplement

Stellenwertsystem

Ein **Stellenwertsystem** ordnet jeder Ziffer anhand ihrer Position einen Stellenwert zu. Die Anordnung erfolgt von rechts nach links und jede Stelle besitzt einen konstanten Stellenwert.

Stellenwert:	10^3	10^2	10^1	10^0
Ziffern (z.B.):	5	8	3	2
	↑ höchstwertigste Stelle			↑ niederwertigste Stelle

Um den Wert einer Dezimalzahl zu berechnen, werden die Ziffern der Zahl mit ihren Stellenwerten multipliziert und die Produkte aufaddiert.

Skript S. 127 ff

Stellenwertsysteme

$$a = a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 10^0 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 10^i$$

$$3745 = 3 * 1000 + 7 * 100 + 4 * 10 + 5 * 1$$

Satz:

Sei $p \geq 2$ eine ganze Zahl. Dann besitzt jede ganze Zahl a mit $0 \leq a < p^n$ eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i$$

mit $0 \leq a_i < p$ für alle i. Die a_i heißen Ziffern; die Darstellung nennen wir p-*adische* Darstellung von a.

Skript S. 127 ff

Explizite Angabe der Basis

Wo aus dem Zusammenhang nicht eindeutig hervorgeht, welche Basis die Darstellung einer Zahl verwendet, geben wir die Basis explizit als Zusatz an. Zur Darstellung der Basis verwenden wir stets das Dezimalsystem.

Beispiele:

13_{10}	=	1101_{2}	=	23_{5}	=	15_{8}	=	D_{16}
64_{10}	=	1000000_{2}	=	224_{5}	=	100_{8}	=	40_{16}
100_{10}	=	1100100_{2}	=	400_{5}	=	144_{8}	=	64_{16}
2505_{10}	=	100111001001_{2}	=	40010_{5}	=	4711_{8}	=	$9C9_{16}$

Im Hexadezimalsystem benötigen wir 16 verschiedene Ziffern, daher dienen die Buchstaben A bis F als Ziffern 10 bis 15

Skript S. 128

Gegenüberstellung von Dezimal-, Dual- und Hexadezimaldarstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Dec	Bin	Hex
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7

Dec	Bin	Hex
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Komplementdarstellungen von ganzen Zahlen

Skript S. 128 f

Komplemente

Definition:

Komplemente einer Zahl a in einer *p-adischen* Darstellung mit n Stellen sind Abbildungen der Menge nicht negativer ganzer $M=\{0,\ldots,p^n-1\}$ Zahlen auf sich selbst, so daß

$$k_{p-1}(a) = p^n - 1 - a$$

$p =$ Basis

$a =$ beliebige Zahl

$n =$ Stellenzahl

oder

$$k_p(a) = p^n - a$$

gilt. Diese Abbildungen werden als *(p -1)-Komplement* bzw. *p-Komplement* bezeichnet.

Skript S. 128 ff

Beispiele für Komplementdarstellungen (1)

Beispiel: Komplementendarstellung Dezimalzahlen

Zweistellige Zahlen in Dezimalschreibweise: n = 2, p = 10

(p-1)-Komplement				*p-Komplement*			
a	$k_9(a)$	a	$k_9(a)$	a	$k_{10}(a)$	a	$k_{10}(a)$
00	99	50	49	00	00	50	50
01	98	51	48	01	99	51	49
02	97	52	47	02	98	52	48
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
48	51	98	01	48	52	98	02
49	50	99	00	49	51	99	01

Skript S. 129

Beispiele für Komplementdarstellungen (2)

Beispiel: Komplementdarstellung Dualzahlen

Dreistellige Zahlen in Dualschreibweise: n = 3, p = 2

(p-1)-Komplement				*p-Komplement*			
a	*k (a)*	*a*	*k (a)*	*a*	*k (a)*	*a*	*k (a)*
000	111	100	011	000	000	100	100
001	110	101	010	001	111	101	011
010	101	110	001	010	110	110	010
011	100	111	000	011	101	111	001

Skript S. 129

Nutzen der Komplementdarstellung

Komplementendarstellung

Definition:

Bei der K_p-*Darstellung* (p-Komplement-Darstellung) stellen wir negative Zahlen durch das Komplement ihres Betrages dar, so dass eine Folge von n Ziffern a_i eine Zahl a bedeutet nach der Regel

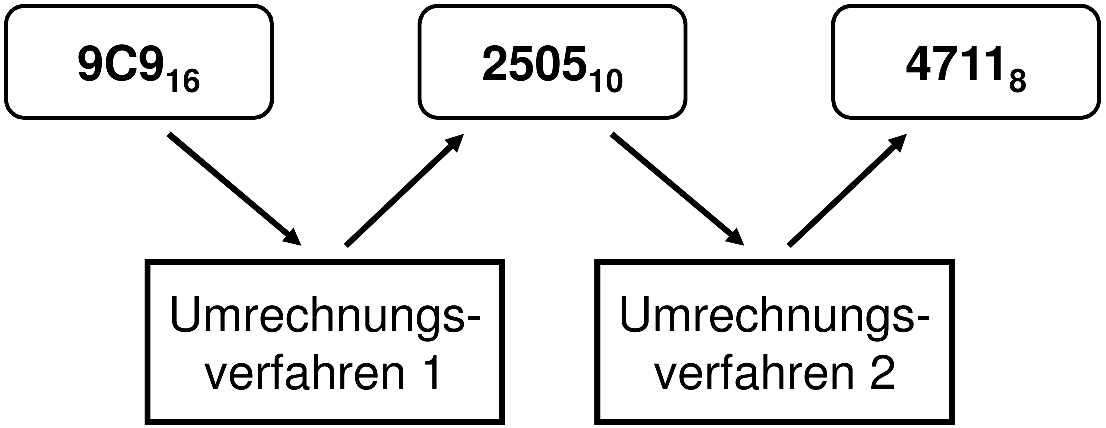
$$a = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-2} a_i\, p^i & \text{wenn } a_{n-1} = 0, \\ \sum_{i=0}^{n-2} a_i\, p^i - p^{n-1} & \text{wenn } a_{n-1} = p-1, \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Skript S. 131

Beispiel:
Suche größte und kleinste 3-stellige Dualzahl

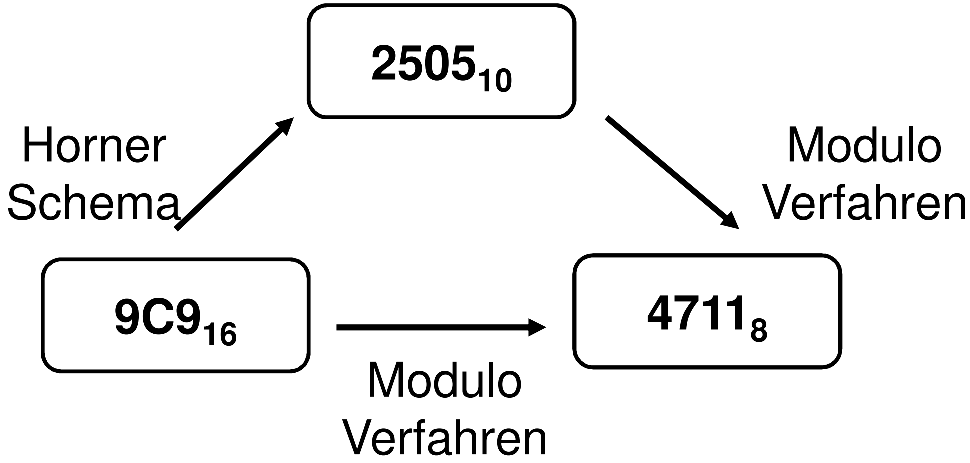
Umrechnungsverfahren

Ein Umrechnungsverfahren dient dazu, ausgehend von einer gegebenen Darstellung die Darstellung desselben Wertes mit einer anderen Basis zu ermitteln:



Skript S. 131 ff

Ein Umrechnungsverfahren dient dazu, ausgehend von einer gegebenen Darstellung die Darstellung desselben Wertes mit einer anderen Basis zu ermitteln:



Skript S. 131 ff

Hornerschema

Verfahren:

Zur Auswertung eines Polynoms (k-1)-ten Grades an der Stelle p beginnt man mit dem Koeffizienten a_{k-1}, der zum höchsten Exponenten p^{k-1} gehört, und bildet eine Folge von Zwischenergebnissen z_i:

$$
\begin{aligned}
z_{k-1} &= a_{k-1} \\
z_{k-2} &= pz_{k-1} + a_{k-2} \\
z_{k-3} &= pz_{k-2} + a_{k-3} \\
&\vdots \\
z_1 &= pz_2 + a_1 \\
z_0 &= pz_1 + a_0
\end{aligned}
$$

Dann ist z_0 der gesuchte Wert des Polynoms an der Stelle p.

Skript S. 132

Beispiel: Hornerschema

Beispiel zum Hornerschema

Berechnen des Wertes der Zahl $\mathbf{1457_8}$ nach dem Hornerschema:

mit p = 8 und k = 4 folgt:

$$z_{k-1} = z_3 := a_3 = 1$$

$$z_2 := pz_3 + a_2 = 8 \cdot 1 + 4 = 12$$

$$z_1 := pz_2 + a_1 = 8 \cdot 12 + 5 = 101$$

$$z_0 := pz_1 + a_0 = 8 \cdot 101 + 7 = 815$$

Modulo-Verfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Verfahren

Gegeben sei eine Zahl z in *k-stelliger*, *p-adischer* Darstellung. Gesucht sei die Darstellung von z zur Basis q. Man bildet eine Folge von Zwischenergebissen

$$
\begin{array}{ll}
y_0 = z \bmod q & z_0 = \lfloor z / q \rfloor \\
y_1 = z_0 \bmod q & z_1 = \lfloor z_0 / q \rfloor \\
\vdots & \vdots \\
y_l = z_{l-1} \bmod q & z_l = \lfloor z_{l-1} / q \rfloor
\end{array}
$$

Solange, bis $z_l = 0$ gilt. Dann sind y_i mit $j \in \{0, 1, ..., l\}$ die Ziffern der *q-adischen* Darstellung von z.

Skript S. 133

Beispiel: Modulo-Verfahren

Beispiel zum Modulo-Verfahren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Umrechnung der Zahl **815_{10}** in die Oktalschreibweise

es ist: $z = 815$, $p = 10$ und $q = 8$

$$y_0 = z \bmod q = 815 \bmod 8 = 7 \qquad z_0 = \lfloor z/q \rfloor = \lfloor 815/8 \rfloor = 101$$

$$y_1 = z_0 \bmod q = 101 \bmod 8 = 5 \qquad z_1 = \lfloor z_0/q \rfloor = \lfloor 101/8 \rfloor = 12$$

$$y_2 = z_1 \bmod q = 12 \bmod 8 = 4 \qquad z_2 = \lfloor z_1/q \rfloor = \lfloor 12/8 \rfloor = 1$$

$$y_3 = z_2 \bmod q = 1 \bmod 8 = 1 \qquad z_3 = \lfloor z_2/q \rfloor = \lfloor 1/8 \rfloor = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1457_8$$

Arithmetik ganzer Zahlen

Skript S. 134 ff

Grundrechenarten im Binärsystem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Addition

```
 100111
+001011
  1111
-------
 110010
```

Subtraktion

```
 0110010
-0001011
--------
```

$K_2(-0001011) =$

1110101

Subtraktion

```
 0110010
+1110101
  11
--------
10100111
```

Skript S. 134 ff

Grundrechenarten im Binärsystem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Multiplikation

```
 100111*1011
 -----------
   100111
     100111
      100111
    111111
 -----------
   110101101
```

Division

```
 110101101 = 1011 * 100111
-1011
 -------
 0010011
   -1011
  ------
   010000
   - 1011
   ------
    001011
    - 1011
      ----
      0000
```

Skript S. 137 ff

Demo: Wissenschaftlicher Taschenrechner

Darstellung reeller Zahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz 5-4

Es sei $p \geq 2$ eine ganze Zahl. Jede nicht negative reelle Zahl r kann durch die Form

$$r = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i p^i$$

dargestellt werden. Dabei gilt $0 \leq a_i < p$ für alle i. Diese Darstellung wird *p-al-Bruch* genannt.

Skript S. 139

Notation und Normierung: Mantisse-Exponent Darstellung

Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$r = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i p^i \quad \text{für} \;\; 123.25$$

$a_i = 0 \;\; \forall i > 2$
$a_2 = 1$
$a_1 = 2$
$a_0 = 3$
$a_{-1} = 2$
$a_{-2} = 5$
$a_i = 0 \;\; \forall \; i < -2$

$$\Rightarrow r = \ldots 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + \ldots$$

Exponentdarstellung

Datentyp REAL

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Definition 5-4

Der Datentyp Real ist die Teilmenge der reellen Zahlen, die in der Form

$$r = \sum_{i=-1}^{-n} a_i p^i \cdot q^e$$

geschrieben werden können, wobei für alle i gilt: $0 \leq a_i < p$. Außerdem sei $-q^k \leq e < q^k$, so dass $\bar{e}=e+q^k$ in jedem Falle mit $k+1$ Stellen zur $Basis\ q$ darstellbar ist. Diese Darstellung wird als normiert bezeichnet, wenn $a_{-1} \neq 0$ gilt oder sowohl alle a_i als auch $\bar{e}$ gleich Null sind (Darstellung für $r=0$)

Skript S. 141

Beispiel zur Mantissen-Exponenten Darstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Gleitkommadarstellung nach IEEE 754

4 byte - 32 bit - single precision

31	30 … 23	22 … 0
±	Exponent $\bar{e}$	Mantisse a

8 byte - 64 bit - double precision

63	62 … 52	51 … 0
±	Exponent $\bar{e}$	Mantisse a

Skript S. 141

Die ASCII Codierung

b6 b5 b4 / Bits (b7 = 0) / b3 b2 b1 b0	0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
	Steuerzeichen		Ziffern und Sonderzeichen		Groß-buchstaben		Klein-buchstaben	
0 0 0 0	0 NUL 0 0	16 DLE 10 20	32 SP 20 40	48 0 30 60	64 @ 40 100	80 P 50 120	96 ‘ 60 140	112 p 70 160
0 0 0 1	1 SOH 1 1	17 DC1 11 21	33 ! 21 41	49 1 31 61	65 A 41 101	81 Q 51 121	97 a 61 141	113 q 71 161
0 0 1 0	2 STX 2 2	18 DC2 12 22	34 ” 22 42	50 2 32 62	66 B 42 102	82 R 52 122	98 b 62 142	114 r 72 162
0 0 1 1	3 ETX 3 3	19 DC3 13 23	35 # 23 43	51 3 33 63	67 C 43 103	83 S 53 123	99 c 63 143	115 s 73 163
0 1 0 0	4 EOT 4 4	20 DC4 14 24	36 $ 24 44	52 4 34 64	68 D 44 104	84 T 54 124	100 d 64 144	116 t 74 164
0 1 0 1	5 ENQ 5 5	21 NAK 15 25	37 % 25 45	53 5 35 65	69 E 45 105	85 U 55 125	101 e 65 145	117 u 75 165
0 1 1 0	6 ACK 6 6	22 SYN 16 26	38 & 26 46	54 6 36 66	70 F 46 106	86 V 56 126	102 f 66 146	118 v 76 166
0 1 1 1	7 BEL 7 7	23 ETB 17 27	39 ’ 27 47	55 7 37 67	71 G 47 107	87 W 57 127	103 g 67 147	119 w 77 167
1 0 0 0	8 BS 8 10	24 CAN 18 30	40 (28 50	56 8 38 70	72 H 48 110	88 X 58 130	104 h 68 150	120 x 78 170
1 0 0 1	9 HT 9 11	25 EM 19 31	41) 29 51	57 9 39 71	73 I 49 111	89 Y 59 131	105 i 69 151	121 y 79 171
1 0 1 0	10 LF A 12	26 SUB 1A 32	42 * 2A 52	58 : 3A 72	74 J 4A 112	90 Z 5A 132	106 j 6A 152	122 z 7A 172
1 0 1 1	11 VT B 13	27 ESC 1B 33	43 + 2B 53	59 ; 3B 73	75 K 4B 113	91 [5B 133	107 k 6B 153	123 { 7B 173
1 1 0 0	12 FF C 14	28 FS 1C 34	44 , 2C 54	60 < 3C 74	76 L 4C 114	92 \ 5C 134	108 l 6C 154	124 | 7C 174
1 1 0 1	13 CR D 15	29 GS 1D 35	45 – 2D 55	61 = 3D 75	77 M 4D 115	93] 5D 135	109 m 6D 155	125 } 7D 175
1 1 1 0	14 SO E 16	30 RS 1E 36	46 . 2E 56	62 > 3E 76	78 N 4E 116	94 ^ 5E 136	110 n 6E 156	126 ~ 7E 176
1 1 1 1	15 SI F 17	31 US 1F 37	47 / 2F 57	63 ? 3F 77	79 O 4F 117	95 _ 5F 137	111 o 6F 157	127 DEL 7F 177

Zeichendarstellung über die **ASCII Codierung**:
American **S**tandard **C**ode for **I**nformation **I**nterchange

Darstellung des Zeichens ‚u‘:

Dezimaldarstellung: 117

Oktaldarstellung: 165

Hexadezimaldarstellung: 75

Dualdarstellung: **`0111 0101`**

Skript S. 143 ff

ISO 8859-1

b6 b5 b4 / Bits (b7 = 1) / b3 b2 b1 b0	0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1
	Steuerzeichen		Ziffern und Sonderzeichen		Groß-buchstaben		Klein-buchstaben	
0 0 0 0	128 CTL 80 200	144 CTL 90 220	160 NBSP A0 240	176 ° B0 260	192 À C0 300	208 Ð D0 320	224 à E0 340	240 ð F0 360
0 0 0 1	129 CTL 81 201	145 CTL 91 221	161 ¡ A1 241	177 ± B1 261	193 Á C1 301	209 Ñ D1 321	225 á E1 341	241 ñ F1 361
0 0 1 0	130 CTL 82 202	146 CTL 92 222	162 ¢ A2 242	178 ² B2 262	194 Â C2 302	210 Ò D2 322	226 â E2 342	242 ò F2 362
0 0 1 1	131 CTL 83 203	147 CTL 93 223	163 £ A3 243	179 ³ B3 263	195 Ã C3 303	211 Ó D3 323	227 ã E3 343	243 ó F3 363
0 1 0 0	132 CTL 84 204	148 CTL 94 224	164 € A4 244	180 Ž B4 264	196 Ä C4 304	212 Ô D4 324	228 ä E4 344	244 ô F4 364
0 1 0 1	133 CTL 85 205	149 CTL 95 225	165 ¥ A5 245	181 µ B5 265	197 Å C5 305	213 Õ D5 325	229 å E5 345	245 õ F5 365
0 1 1 0	134 CTL 86 206	150 CTL 96 226	166 Š A6 246	182 ¶ B6 266	198 Æ C6 306	214 Ö D6 326	230 æ E6 346	246 ö F6 366
0 1 1 1	135 CTL 87 207	151 CTL 97 227	167 § A7 247	183 · B7 267	199 Ç C7 307	215 × D7 327	231 ç E7 347	247 ÷ F7 367
1 0 0 0	136 CTL 88 208	152 CTL 98 228	168 š A8 248	184 ž B8 268	200 È C8 308	216 Ø D8 328	232 è E8 348	248 ø F8 368
1 0 0 1	137 CTL 89 209	153 CTL 99 229	169 © A9 249	185 ¹ B9 269	201 É C9 309	217 Ù D9 329	233 é E9 349	249 ù F9 369
1 0 1 0	138 CTL 8A 210	154 CTL 9A 230	170 ª AA 250	186 º BA 270	202 Ê CA 310	218 Ú DA 330	234 ê EA 350	250 ú FA 370
1 0 1 1	139 CTL 8B 211	155 CTL 9B 231	171 « AB 251	187 » BB 271	203 Ë CB 311	219 Û DB 331	235 ë EB 351	251 û FB 371
1 1 0 0	140 CTL 8C 212	156 CTL 9C 232	172 ¬ AC 252	188 Œ BC 272	204 Ì CC 312	220 Ü DC 332	236 ì EC 352	252 ü FC 372
1 1 0 1	141 CTL 8D 213	157 CTL 9D 233	173 SHY AD 253	189 œ BD 273	205 Í CD 313	221 Ý DD 333	237 í ED 353	253 ý FD 373
1 1 1 0	142 CTL 8E 214	158 CTL 9E 234	174 ® AE 254	190 Ÿ BE 274	206 Î CE 314	222 Þ DE 334	238 î EE 354	254 þ FE 374
1 1 1 1	143 CTL 8F 215	159 CTL 9F 235	175 ¯ AF 255	191 ¿ BF 275	207 Ï CF 315	223 ß DF 335	239 ï EF 355	255 DEL FF 375

Zeichendarstellung über **ISO 8859-1**,
ISO: **I**nternational **O**rganisation for **S**tandardization

ISO 8859-1 ist die ASCII-Code Erweiterung mit b7 = 1

Darstellung des Zeichens ‚÷‘:

Dezimaldarstellung: 247

Oktaldarstellung: 367

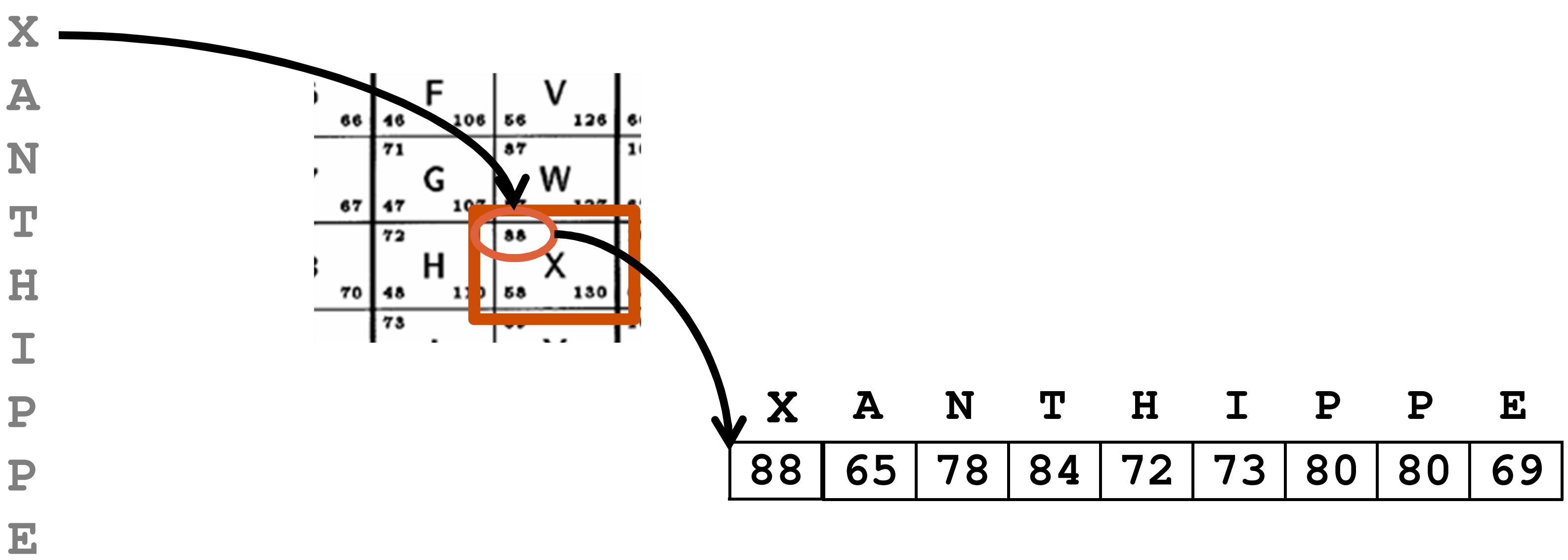
Hexadezimaldarstellung: F7

Dualdarstellung: **`1111 0111`**

Skript S. 146 ff

Textdarstellung

- Jedem Buchstaben, jeder Ziffer und jedem sonstigen Zeichen (Sonderzeichen) ordnet man mittels einer Tabelle eine Kodenummer zu.
- Die Code-Nummern werden einzeln in aufeinanderfolgenden Speicherzellen abgelegt.
- Beispiel: Zeichenfolge „XANTHIPPE“ in ASCII Dezimaldarstellung



Zeichendarstellung über die Unicode Codierung

Definiert durch das Unicode-Konsortium (www.unicode.org).

- Ziel ist die Entwicklung sprach-, plattform- und programmunabhängiger Darstellung von Textdaten (ISO 10646 konform).
- Der Unicode-Standard findet sich in zahlreichen modernen Softwareprodukten (z.B. Java, XML...).
- Die Zeichen werden im Unicode über 16 bit (2 Byte) codiert. Somit sind 65.536 verschiedene Zeichen möglich.

	ASCII/ISO 8859-1		Unicode	
D	0100 0100	44	0000 0000 0100 0100	0044
I	0100 1001	49	0000 0000 0100 1001	0049
K	0100 1011	4B	0000 0000 0100 1011	004B
œ	N/A		0000 0001 0101 0011	0153
¥	N/A		0000 0000 1010 0101	00A5
ش	N/A		0000 0110 1111 1010	06FA

Skript S. 148

Boolesche Algebra

Skript S. 148 ff

Boolesche Algebra

Die Boolesche Algebra besteht aus:

- Einer zwei-elementigen Menge {0,1} oder {false, true}
- Operationen auf den Elementen dieser Menge sind:

Konjunktion	Disjunktion	Negation	Exklusiv Oder
liefert 1 (true), wenn Parameter x und y gleich 1 sind	liefert 1 (true), wenn Parameter x oder y gleich 1 sind	liefert 1 (true), wenn Parameter x nicht gleich 1 ist	liefert 1 (true), wenn Parameter x oder y gleich 1 ist; aber nicht beide gleichzeitig
$x \wedge y$	$x \vee y$	$\overline{x}$	$x \oplus y$

Skript S. 150 f

Symbole der Booleschen Algebra

Symbol	Bedeutung	Beispiel
$\neg x$	Boolesche Negation, ***nicht***	$\neg 0 = 1$
$\overline{x}$	Boolesche Negation, ***nicht***	$\overline{0} = 1$
x'	Boolesche Negation, ***nicht***	$0' = 1$
$\wedge$	Boolesche Konjunktion, ***und***	$x \wedge 1 = x$
$\cdot$	Boolesche Konjunktion, ***und***	$x \cdot 1 = x$
$\vee$	Boolesche Disjunktion, ***oder***	$x \vee 0 = x$
$+$	Boolesche Disjunktion, ***oder***	$x + 0 = x$
$\oplus$	Boolesches ***Exklusiv-Oder***	$x \oplus 1 = \overline{x}$

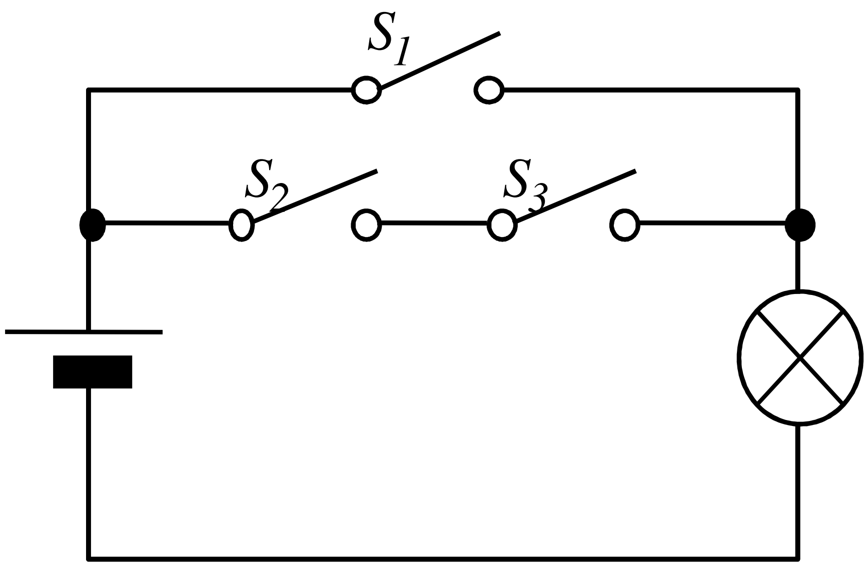
Wertetabelle: Boolescher Funktionen

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$\bar{x}$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$$

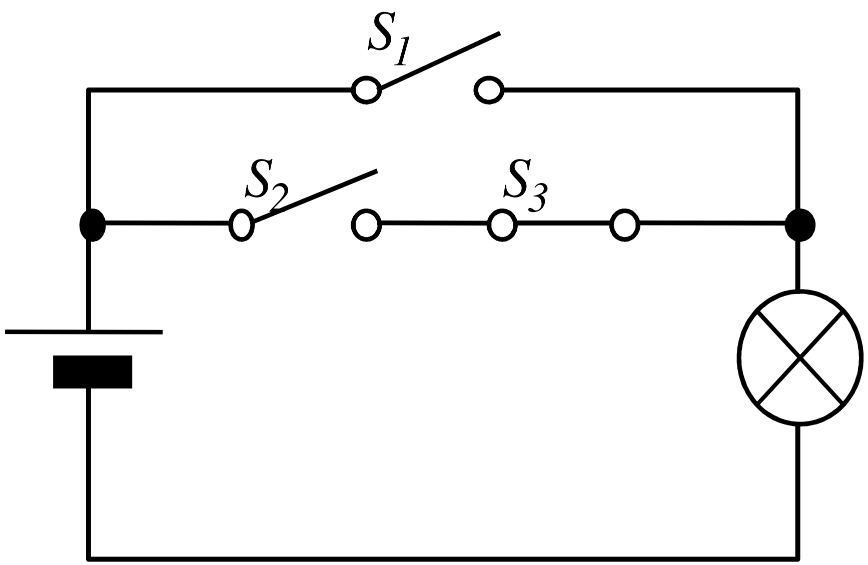


S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$$

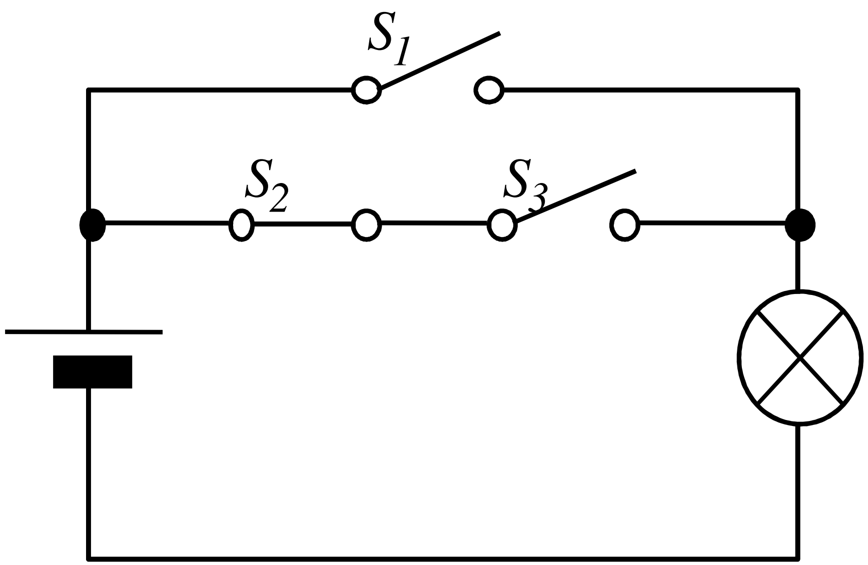


S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$$

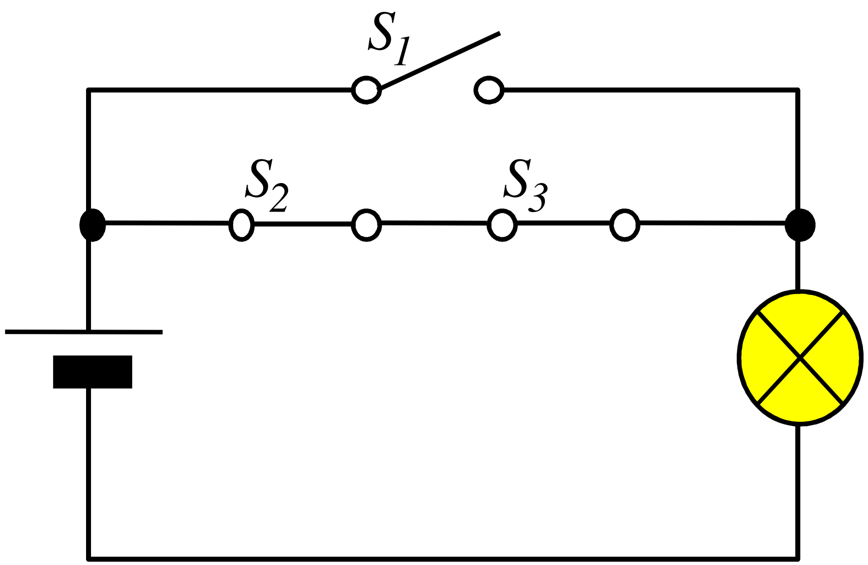


S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee \left(S_2 \wedge S_3\right)$$

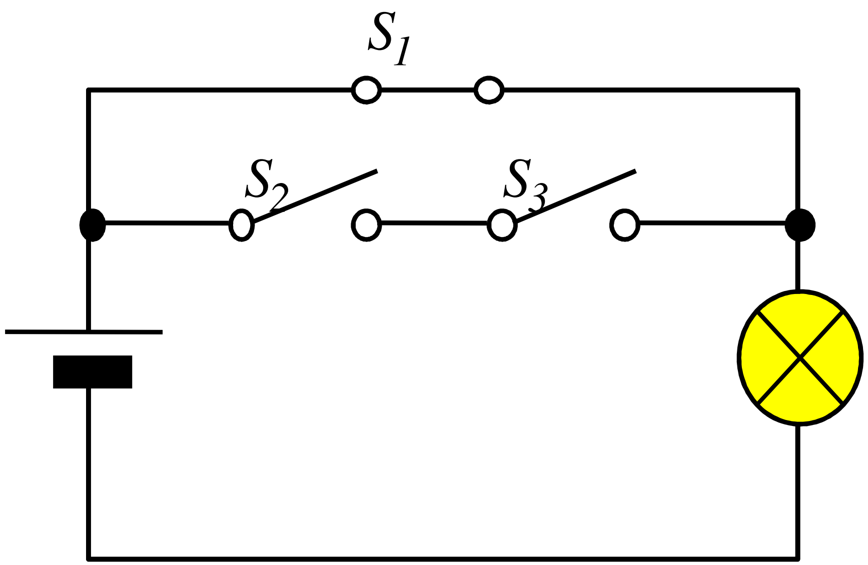


S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$$

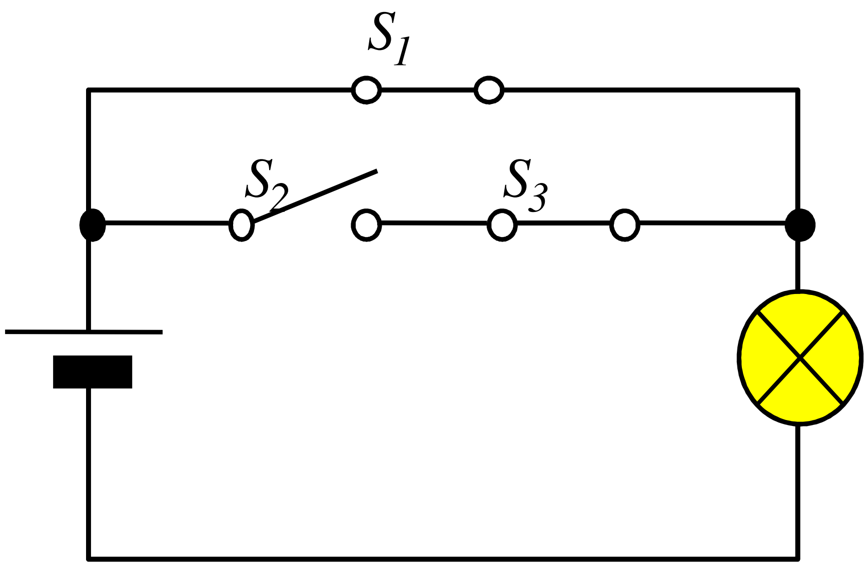


S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee \left(S_2 \wedge S_3 \right)$$

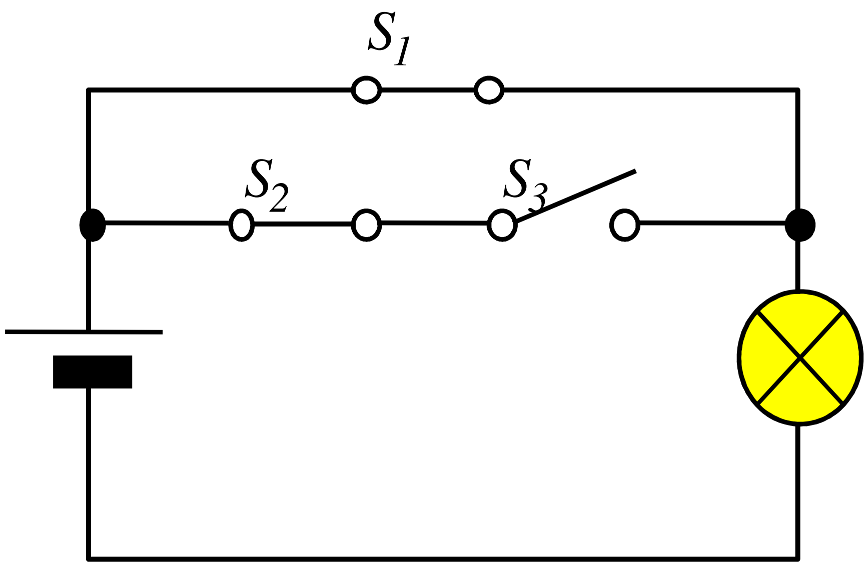


S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$$

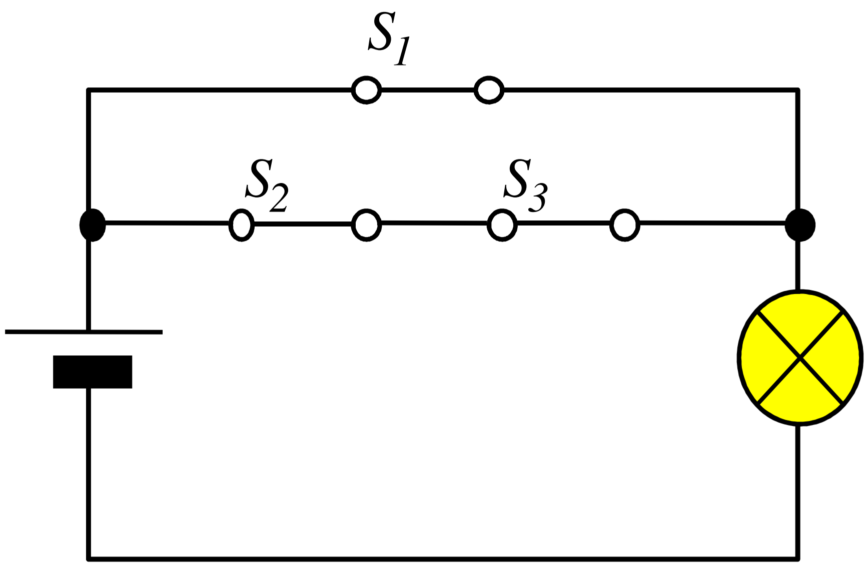


S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Beispiel 4-16: Abbildung der Booleschen Algebra auf einen elektrischen Schaltvorgang

S1, S2, S3:
„Schalter 1, 2, 3 geschlossen“: Wert = 1
L:
„Lampe leuchtet“: Wert = 1

$$L = S_1 \vee (S_2 \wedge S_3)$$



S_1	S_2	S_3	L
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Rechengesetze der Booleschen Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Satz 5-5

Die folgenden Regeln sind in der Booleschen Algebra anwendbar. Sie heißen in der vorgestellten Reihenfolge *Idempotenzgesetz, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Absorptionsgesetz, Distributivgesetz* und *De Morgansche* Regeln.

$$x = x \vee x \qquad x = x \wedge x \tag{5-17}$$

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad x \vee y = y \vee x \tag{5-18}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \tag{5-19}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x \qquad x \vee (x \wedge y) = x \tag{5-20}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{5-21}$$

$$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} \qquad \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \tag{5-22}$$

Skript S. 151

Rechengesetze der Booleschen Algebra

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Für die neutralen Elemente bezüglich Disjunktion bzw. Konjunktion sowie für Null- und Eins-Element (minimales bzw. maximales Element der Algebra) gilt außerdem:

$$x \wedge 0 = 0 \quad x \vee 1 = 1 \tag{5-23}$$

$$x \wedge 1 = x \quad x \vee 0 = x \tag{5-24}$$

$$x \wedge \bar{x} = 0 \quad x \vee \bar{x} = 1 \tag{5-25}$$

Schließlich gilt, dass die Negation eine zu sich selbst inverse Operation ist, also

$$\bar{\bar{x}} = x \tag{5-26}$$

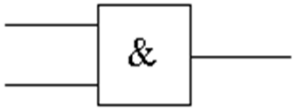
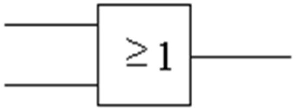
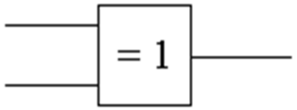
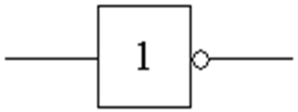
Beim Vereinfachen Boolescher Ausdrücke sind die folgenden Äquivalenzen sehr nützlich:

$$x \wedge (\bar{x} \vee y) = x \wedge y \quad x \vee (\bar{x} \wedge y) = x \vee y \tag{5-27}$$

$$(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) = y \quad (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) = y \tag{5-28}$$

Skript S. 151

Symbole für Verknüpfungsglieder

Symbol	Bedeutung
	Und-Verknüpfung
	Oder-Verknüpfung
	Exklusiv-Oder-Verknüpfung
	Negation, Komplement

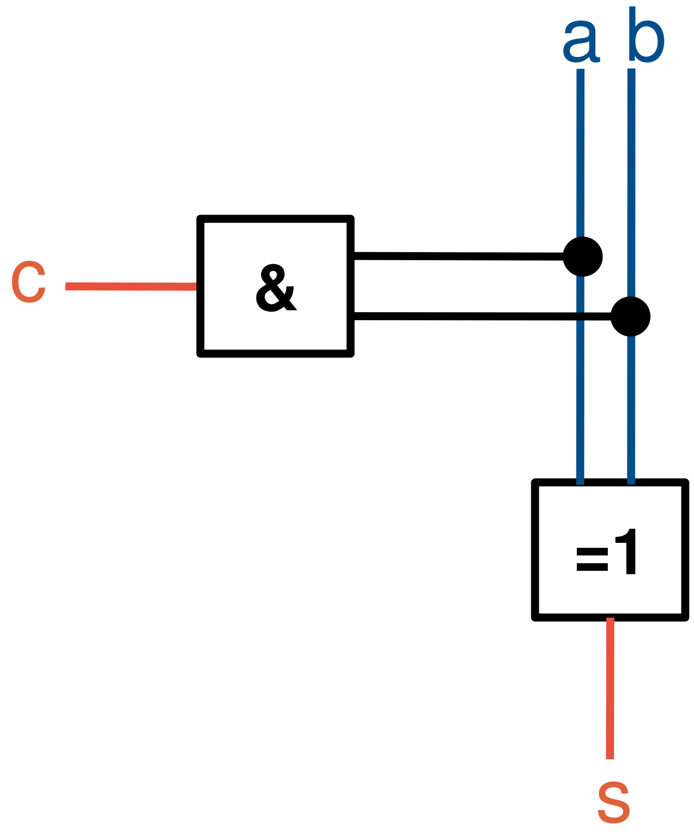
Skript S. 160

Halbaddierer

Ein **Halbaddierer** besitzt

- Eingänge für Summanden a, b
- Ausgänge für Summe s, Übertrag c

a	b	s	c
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1



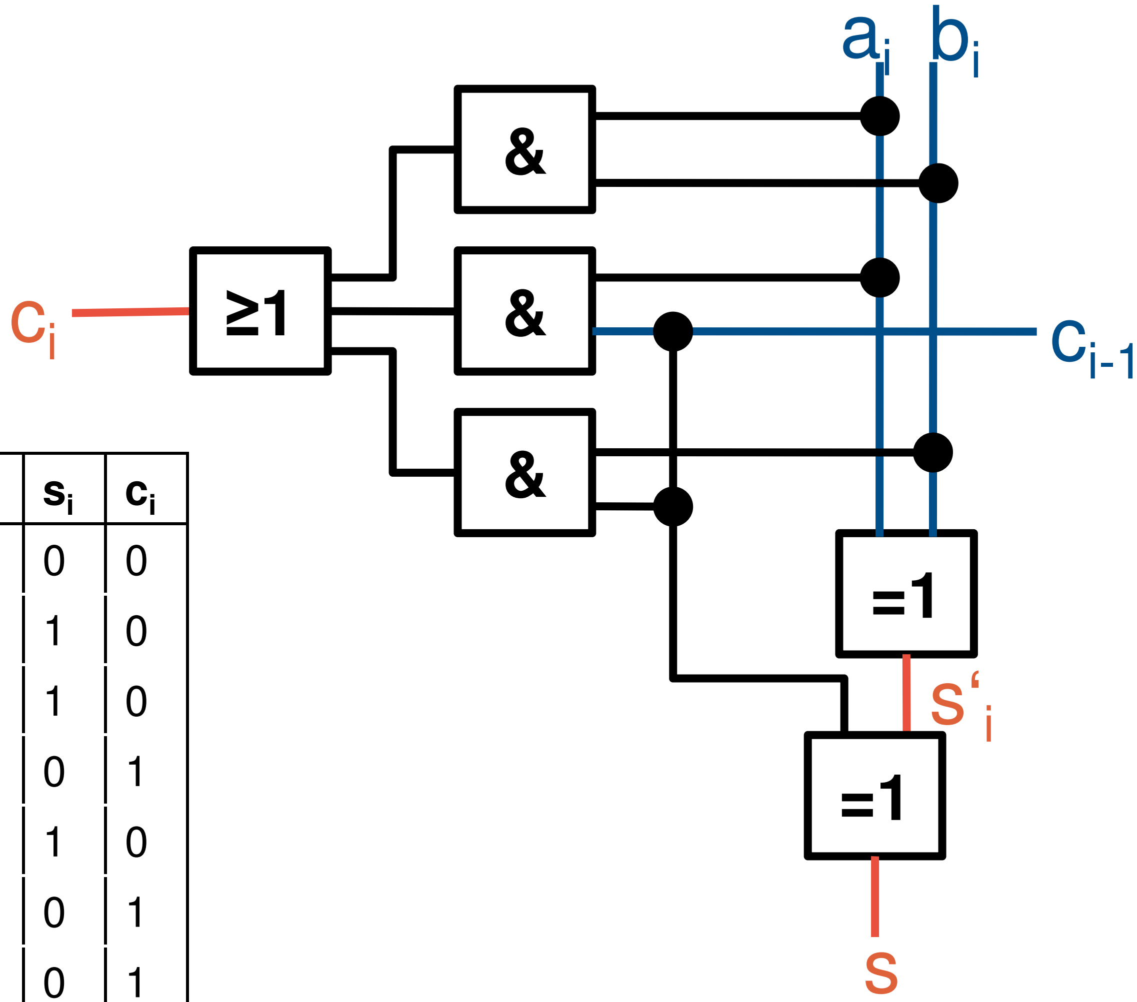
Skript S. 159

Volladdierer

Ein **Volladdierer** besitzt

- Eingänge für
  Summanden a_i, b_i
  Übertrag c_{i-1}
- Ausgänge für
  Summe s_i
  Übertrag c_i

a	b	c_{i-1}	s'_i	s_i	c_i
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1



Skript S. 159